

INTEGRALI

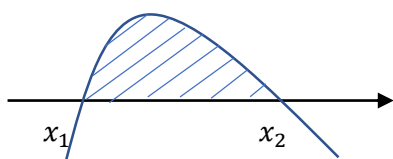
TABELA INTEGRALOV

Funkcija	Integral
Konstanta, k	$kx + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a } + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$

Funkcija	Integral
$\tan x$	$-\ln \cos x + c$
$\cot x$	$\ln \sin x + c$
$\frac{1}{(\cos x)^2}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{(\sin x)^2}$	$-\cot x + c$
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + c$

PLOŠČINE

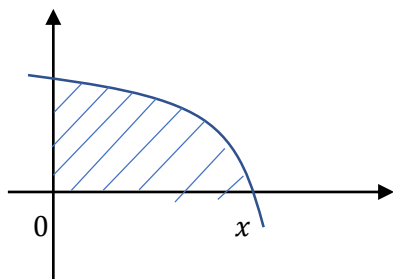
a) med krivuljo $f(x)$ in abscisno osjo



meji: ničli $\rightarrow f(x) = 0$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

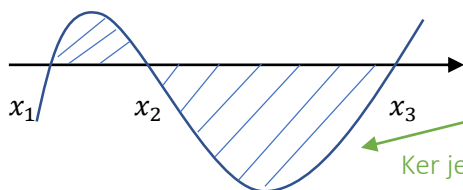
b) med krivuljo $f(x)$ in koordinatnima osema



meji: 0 in ničla ($f(x) = 0$)

$$S = \int_0^x f(x) dx$$

c) med krivuljo $f(x)$ in abscisno osjo

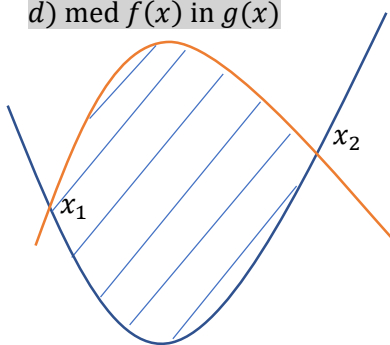


meje: ničle $\rightarrow f(x) = 0$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx$$

Ker je del ploščine pod x, mu damo predznak —.

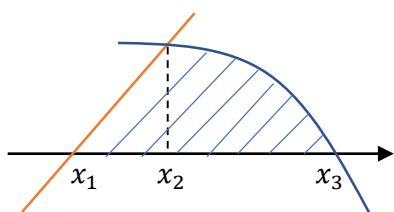
d) med $f(x)$ in $g(x)$



meji: abscisi presečišč $f(x) = g(x)$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \quad (\text{zgornja} - \text{spodnja})$$

e) med $f(x)$, $g(x)$ in abscisno osjo



meje: ničli ($f(x) = 0$ in $g(x) = 0$) in

presečišče ($f(x) = g(x)$)

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} g(x) dx$$

VOLUMEN VR TENINE

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi(f(x))^2 dx \quad \text{ali} \quad V = V_2 - V_1 = \int_{x_1}^{x_3} \pi(f(x))^2 dx - \int_{x_2}^{x_3} \pi(g(x))^2 dx, \quad \text{če računaš volumen med dvema funkcijama.}$$

NAČINI RAČUNANJA INTEGRALOV

Nova spremenljivka

Uporabljamo:

-potence $(2x + 3)^3$

-koreni $\sqrt{2x + 3}$

-koti $\sin(2x)$

-eksponenti e^{2x+3}

-ulomki $\frac{2x-4}{x^2-4x}$ (vendar samo, če je števec odvod imenovalca)

Odvod racionalnih funkcij

a) St. števca < st. imenovalca

- I. Imenovalcec je nova spremenljivka, če je števec odvod le tega
- II. Pravila $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx \dots \arctan x, \arcsin x \dots$
- III. Uvedba A in B

Primer: $\int \frac{3x}{x^2-x-2} dx = \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x+1} dx = \dots$

$$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{A}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A-2B}{(x-2)(x+1)}$$

$A+B=3$
 $A-2B=0 \dots$ izračunam A in B, vstavim v integral in nato integriram

b) St. števca > st. imenovalca

Najprej delimo, da dobimo lažji integral:

$$\text{števec: imenovalcec} = \text{rezultat} + \frac{\text{ostanek}}{\text{imenovalcec}}$$

Per partes (integral produkta)

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$u = \ln x, \text{polinomi}$

$v = \sin x, \cos x, e^x$